

# Solution analytique de l'onde de choc dans un pieu encastré Analytical solution for a shock wave in an embedded pile

A. Holeyman & X. Bachy  
Université Catholique de Louvain, Belgium

*Keywords:* wave equation, pile, pile driving, integrity testing, soil impedance

**RÉSUMÉ:** Au départ de l'équation de l'onde relative à un pieu semi-infini libre, une théorie plus complète est présentée pour tenir compte de la présence du sol entourant un pieu. La réaction du sol s'opposant au mouvement du pieu est représentée par une raideur linéique et un coefficient d'amortissement. Une solution analytique est identifiée pour le cas singulier de l'amortissement critique, raisonnablement représentatif des cas pratiques. On peut ainsi directement évaluer l'influence du frottement latéral mobilisé sur l'énergie transmise au pieu. Les résultats produits par la solution analytique sont corroborés par la résolution numérique de l'équation de l'onde.

**ABSTRACT:** Building upon the wave equation applicable to a semi-infinitely long pile, a more complete theory is presented to account for the presence of the surrounding soil. The soil reaction opposing the pile movement is represented by a linearly distributed spring constant and damping coefficient. An analytical solution is identified for the singular case of the critical damping, which reasonably corresponds to practical cases. It is therefrom directly possible to evaluate the influence of the mobilized skin friction on the energy transmitted to the pile. The results produced by the analytical solution are verified by comparison with classical numerical resolutions of the wave equation.

## 1 INTRODUCTION

Comme le montre Paquet (1968) la théorie de l'équation d'onde, qui décrit le comportement d'un pieu semi-infini libre, peut être judicieusement complétée en prenant en compte la présence du sol. Représentant le sol environnant le pieu par un modèle de Kelvin viscoélastique schématisé à la figure 1, il obtient une équation de type équation des télégraphistes. Le pieu est représenté par une barre élastique caractérisée par une section  $A$ , un module de Young  $E$  et une masse volumique  $\rho$ . Le sol environnant est représenté par un coefficient de raideur par unité de longueur  $K$  et un coefficient d'amortissement par unité de longueur  $C$ .

Si le terme  $u(z, t)$  représente le déplacement vertical d'une section du pieu localisée en  $z$  et au temps  $t$ , l'équilibre dynamique du volume élémentaire compris entre deux sections voisines séparées par un incrément infiniment petit  $dz$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\rho A}{EA} \cdot \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} + \frac{C}{EA} \cdot \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + \frac{K}{EA} \cdot u(z, t) \quad (1)$$

Des solutions intéressantes et utilisables de cette équation peuvent s'inspirer de la résolution, en électricité, d'équations similaires appelées équations des télégraphistes.

Les valeurs de  $K$  et  $C$  peuvent s'obtenir dans le cas des faibles déplacements du pieu à l'aide de la théorie de l'élasticité appliquée au milieu entourant le pieu. Si on considère en effet que le comportement dynamique du sol peut être caractérisé par son module de cisaillement  $G_s$  et sa masse volumique  $\rho_s$ , on obtient  $K = 2.75 G_s$  (Novak, 1978) ou  $\pi G_s$  (Briard, 1970) et  $C = 2\pi r_0 (\rho_s G_s)^{1/2}$  (Novak, 1978 et Briard, 1970) avec  $r_0$  le rayon du pieu supposé cylindrique.

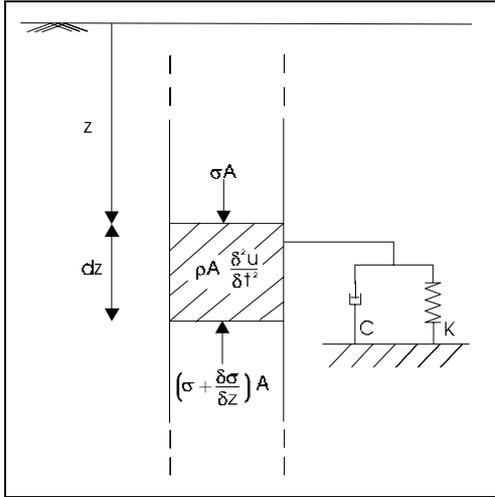


Figure 1. Modèle de pieu élastique et de sol viscoélastique adopté

## 2 DEVELOPPEMENT MATHEMATIQUE

### 1.1 Solution générale

Pour résoudre l'équation (1), on en dérive par rapport au temps la transformée de Laplace:

$$\frac{\partial^2 v(z, s)}{\partial z^2} = \left( \frac{\rho}{E} \cdot s^2 + \frac{C}{EA} \cdot s + \frac{K}{EA} \right) \cdot v(z, s) \quad (2)$$

Cette équation en termes de vitesse verticale possède une solution générale de la forme

$$v(z, s) = a(s) e^{-\gamma z} + b(s) e^{+\gamma z} \quad (3)$$

avec

$$\gamma^2 = \frac{\rho}{E} \cdot \left( s^2 + \frac{C}{\rho A} \cdot s + \frac{K}{\rho A} \right) \quad (4a)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{c^2} \left[ \left( s + \frac{C}{2\rho A} \right)^2 + \left( \frac{K}{\rho A} - \left( \frac{C}{2\rho A} \right)^2 \right) \right] \quad (4b)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{c^2} \left[ (s + \xi)^2 + (\eta^2 - \xi^2) \right] \quad (4c)$$

$$\text{où } \xi = \frac{C}{2\rho A} \text{ et } \eta^2 = \frac{K}{\rho A} \quad (5)$$

où  $\xi$  est l'amortissement et  $\eta$  la fréquence de résonance, tous deux exprimés en Hertz.

### 1.2 Solution particulière

Des conditions limites doivent être judicieusement exprimées pour mener à une solution particulière qui soit non seulement représentative de la réalité des phénomènes d'impact des pieux, mais aussi facilement utilisable. On utilisera les conditions suivantes :

α) Prenant la détermination positive de  $\gamma$ , on impose que  $b(s)=0$  pour que la valeur absolue de  $v(z,s)$  tende vers 0 avec  $1/s$

β) Condition de sollicitation échelon en tête de pieu:  $F(0,t)=F_1=1$  pour tout temps  $t$  positif.

La première condition limite conduit à  $v(z,s) = a(s) e^{-\gamma z}$ . Pour utiliser la seconde on établit le lien entre la vitesse et la force par la transformée de Laplace de la loi de Hooke dérivée par rapport au temps, après avoir noté que la transformée de Laplace de  $F_1$  vaut  $f(s) = 1/s$  pour toute valeur de  $s$ :

$$-E A \gamma a(s) e^{-\gamma z} = -s f(z,s) \quad \stackrel{z=0}{\Rightarrow} \quad a(s) = f(s) \frac{s}{E A \gamma} \quad (6)$$

Et donc

$$v(z,s) = \frac{s}{E A \gamma} f(s) e^{-\gamma z} \quad \stackrel{\text{condition } \beta}{\Rightarrow} \quad v(z,s) = \frac{1}{E A \gamma} e^{-\gamma z} \quad (7)$$

Cette résolution tient compte d'une force connue imposée en tête de pieu. Dans la pratique cette force n'est pas connue a priori car elle dépend elle-même du mouvement de la tête du pieu.

### 3 CAS PRATIQUE

#### 3.1 Condition d'impact

Le système de battage peut être schématisé par un mouton de masse  $M$  dont la vitesse d'impact vaut  $v_i$  et un casque de raideur  $k$ , ainsi que représenté à la figure 2.

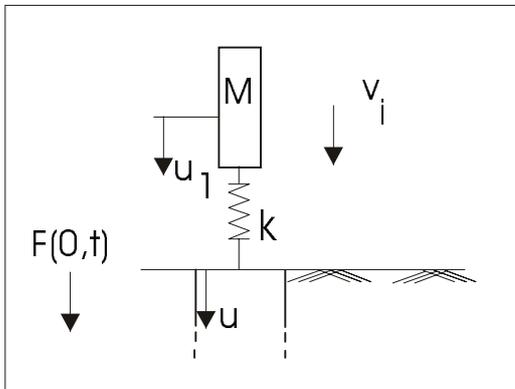


Figure 2. Condition d'impact en tête de pieu

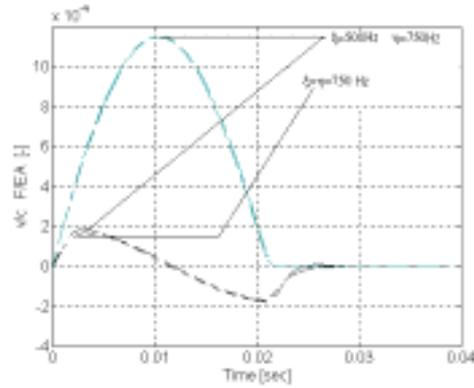


Figure 3. Influence négligeable de  $\xi$  pour  $\eta = 750$  Hz

Les équations d'équilibre du modèle permettent d'établir le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} M\ddot{u}_1 + k(u_1 - u) = 0 \\ F(0,t) - k(u_1 - u) = 0 \end{cases}$$

avec la condition  $F(0,t) \geq 0$  étant donné que le casque de battage ne permet pas le développement d'efforts de traction en tête de pieu. Résolvant la transformée de Laplace de ce système on obtient :

$$f(0, s) = k \left( \frac{v_i - s^2 u}{\omega^2 + s^2} \right) \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (8)$$

Résolvant le système formé par cette équation et par l'équation (6) on obtient sous forme adimensionnelle, ayant posé  $c = (E/\rho)^{1/2}$  la vitesse longitudinale de l'onde dans le pieu et  $I_0 = EA/c$  l'impédance mécanique du pieu :

$$\frac{v(0, s)}{c} = \frac{k}{EA} \cdot v_i \cdot \frac{s}{\sqrt{(s + \xi)^2 + \Delta^2} \cdot (s^2 + \omega^2) + s^2 \frac{k}{I_0}} \quad (9)$$

Nous en déduisons directement la force en tête de pieu:

$$\frac{f(0, s)}{EA} = \frac{k}{EA} \cdot v_i \cdot \frac{\sqrt{(s + \xi)^2 + \Delta^2}}{\sqrt{(s + \xi)^2 + \Delta^2} \cdot (s^2 + \omega^2) + s^2 \frac{k}{I_0}} \quad (10)$$

Pour trouver les transformées inverses de ces expressions, il faudrait trouver les racines d'un polynôme de degré 6, ce qui n'est pas réalisable sous forme analytique. On peut alors analyser deux cas particuliers : premièrement le cas du pieu libre ( $\xi=\eta=0$ ), où la résolution assez immédiate permet de retrouver les résultats détaillés par Van Koten (1977) et Holeyman (1984) ; deuxièmement le cas du pieu soumis à un amortissement critique ( $\xi=\eta$ ) où le polynôme n'est plus que du 3<sup>ème</sup> degré.

## 1.2 Simplification au cas d'amortissement critique

Utilisant une approche numérique basée sur l'intégration pas à pas du mouvement de segments de pieu discrétisé, Bachy et Delire (1998) ont montré que l'action du sol sur le pieu dépend au premier chef de la valeur de  $\eta$  et très peu de la valeur de  $\xi$ . Cette observation, dont une illustration est fournie à la figure 3, est d'autant plus marquée que la valeur de  $\eta$  est élevée. Le comportement d'un sol décrit par un modèle de Kelvin viscoélastique peut donc être approché par une solution analytique simplifiée au cas d'amortissement critique, c'est-à-dire en posant  $\xi = \eta$ .

S'il peut paraître étonnant à première vue que le paramètre déterminant soit  $\eta$ , il ne faut pas perdre de vue que le modèle de comportement du sol ne fait pas intervenir la plasticité. On notera que dans le cas du battage des pieux, la plastification joue un rôle prépondérant tandis que la notion même de résonance s'estompe. Pour respecter les hypothèses posées par le modèle adopté de la figure 1, le déplacement maximum du pieu ne peut dépasser la valeur du seuil de plastification ou « quake ». Il faut donc que la hauteur de chute ou la vitesse d'impact restent limitées dans le cas des essais dynamiques de pieux. Par contre ces limites ne sont pas rencontrées dans le cas des essais d'intégrité, pour lesquels un marteau de faible masse est utilisé.

Sans donner tous les détails de calcul nous pouvons dire que l'expression de la force en tête de pieu est de la forme:

$$\frac{f(0, t)}{EA} = v_i \cdot \frac{k}{EX} \cdot e^{x_1 t} \cdot \frac{(x_1 + \xi) - \left( (x_1 + \xi) \cos(Yt) + \frac{(x_1 + \xi)X - (X^2 + Y^2)}{Y} \sin(Yt) \right) e^{-Xt}}{X^2 + Y^2} \quad (11)$$

où  $X$ ,  $Y$  et  $x_1$  sont fonction de  $\xi(=\eta)$ ,  $k/I_0$  et  $\omega$ . De même on a pu calculer l'expression du déplacement en tête de pieu. Les graphiques obtenus pour un exemple sont donnés à la figure 4.

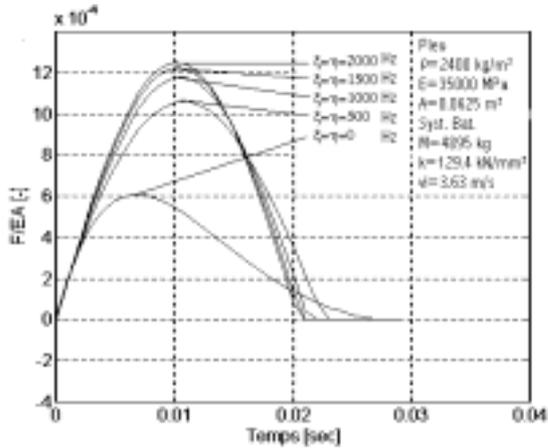


Figure 4. (a) Force en tête de pieu

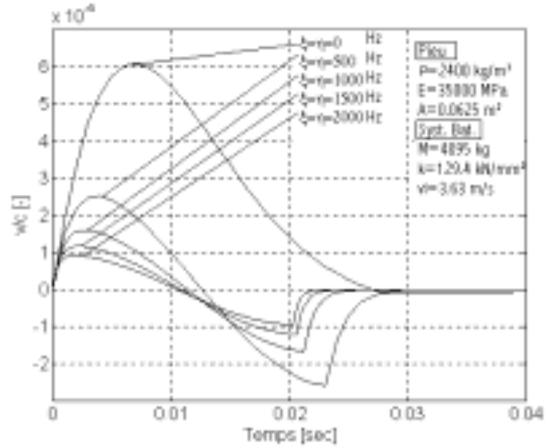


Figure 4. (b) Vitesse en tête de pieu

Nous avons imposé une valeur nulle à la force lorsque celle-ci devient négative pour tenir compte du fait que les casques ne permettent pas la traction. De ce fait, l'expression mathématique de la vitesse en tête de doit également être modifiée au moment où la force s'annule.

### 1.3 Transfert d'énergie

L'énergie transmise (Enthru) à un pieu de longueur L peut être évaluée sur base des expressions de la force et de la vitesse en tête de pieu au moyen de l'expression suivante :

$$Enthru = \frac{2L}{c} \int_0^{\frac{2L}{c}} F(0,t) \cdot v(0,t) dt \quad (12)$$

L'intégration se conduit jusqu'au temps  $2L/c$  pour tenir compte de la réflexion de l'onde incidente, qui généralement a pour effet de réduire à néant le transfert ultérieur d'énergie du mouton vers le pieu. Relativisant par rapport à l'énergie cinétique disponible à l'impact  $\frac{1}{2} Mv_i^2$ , la fonction de transfert peut être développée de sorte qu'elle ne dépende que de trois termes, eux mêmes adimensionnels:

$$Enthru / \frac{1}{2} Mv_i^2 = f(\eta_{11}, \eta_{12}, \mu) \quad (13)$$

avec :  $\eta_{11} = \frac{2I_0}{\sqrt{kM}}$ ,  $\eta_{12} = \frac{C \cdot L}{\sqrt{kM}}$  et  $\mu = \frac{\rho AL}{M} = \frac{M_p}{M}$  (14)

Le rapport de l'énergie transmise à l'énergie cinétique que possède le mouton au moment de l'impact peut donc être exprimé en fonction de trois grandeurs adimensionnelles: le rapport de l'impédance du pieu à celle du système de battage, le rapport de l'impédance totale du sol à l'impédance de battage et le rapport de la masse du pieu à celle du mouton. On peut alors construire des abaques tels que ceux repris à la figure 5 qui sont valables pour autant que la vitesse d'impact soit suffisamment faible pour ne pas dépasser la limite d'élasticité du sol.

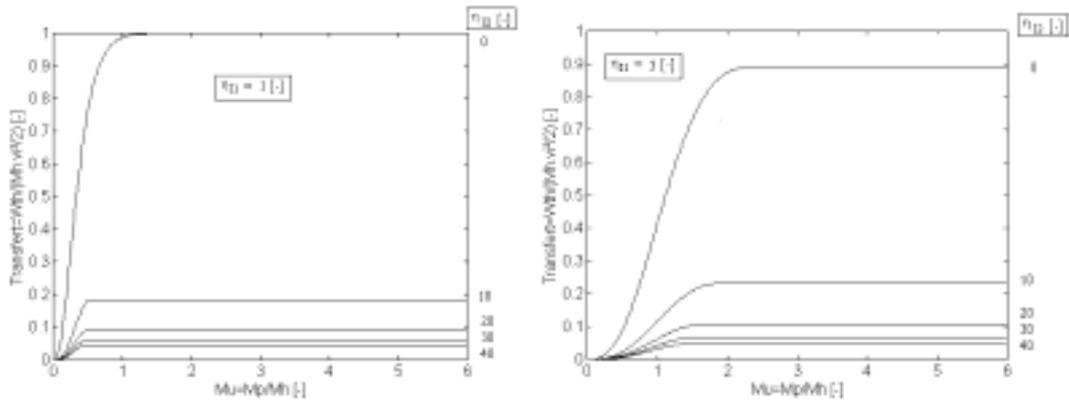


Figure 5. Exemples de fonctions de transfert d'énergie : (a)  $\eta_{II} = 1$  (b)  $\eta_{II} = 3$

#### 4 CONCLUSIONS

Il est possible d'approximer la réponse d'un pieu encastré dans le sol suite à un impact d'énergie limitée au moyen de l'expression (11). Cette approximation est permise grâce à l'observation que le cas singulier de l'amortissement critique peut raisonnablement représenter les cas non singuliers de la pratique. Cette observation a été mise en évidence sur base d'une analyse paramétrique résolue numériquement. Le domaine d'application de la solution proposée est cependant limité au cas pratique des essais dynamiques de pieux, de type intégrité en raison de l'hypothèse viscoélastique adoptée pour modéliser le comportement du sol autour du pieu.

#### 5 REMERCIEMENTS

Les éléments présentés dans cet article ont été développés dans la première partie d'un mémoire de fin d'études réalisé à l'Université Catholique de Louvain, repris dans les références. Les auteurs expriment leur gratitude à Monsieur Delire, co-mémorant, Monsieur Vanden Berghe pour son suivi ainsi qu'au Professeur Coyette pour sa lecture et ses commentaires.

#### REFERENCES

Bachy, X. Et Delire, M. Janvier 1998. Résistance au battage des pieux : Mise en évidence de l'influence du frottement sur l'énergie transmise au pieu et sur le rebond. Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade d'ingénieur Civil des Constructions. UCL.

Briard, M. Juin 1970. Contrôle des pieux par la méthode des vibrations. Annales de l'ITBTP n°270. 105-107.

Holeyman, A. Avril 1984. Contribution à l'étude du comportement transitoire non linéaire des pieux pendant leur battage. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, Belgique.

Novak, M. & Nogami, T. 1978. Dynamic Soil Reaction for Plane Strain Case. Journal of Engineering Mechanical Division. ASCE 104(4). 953-959.

Paquet, J. 1968. Étude vibratoire des pieux en béton – Réponse harmonique et impulsionnelle - Application au contrôle. Annales de l'ITBTP. 789-803.

Van Koten, H. 1977. Dynamic Pile Testing. Inst. TNO for Building Materials and Building Structures. Report January 1977.